Niedersächsisches
Kultusministerium

Erarbeitet von der Kommission des Kerncurriculums für das Fach Mathematik im Sekundarbereich II (2018)

Ergänzende Materialien zum Kerncurriculum für
das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe
die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe
das Berufliche Gymnasium
das Abendgymnasium
das Kolleg

Mathematik

Niedersachsen

In diesem Online-Material werden die Fragen geklärt, wie weit der Formalismus bei der Entwicklung des Integrals auszuführen ist und wie eine anschauliche Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Kurse auf grundlegendem Anforderungsniveau erfolgen kann.

Um das Verständnis zu sichern, wird eine tragfähige Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt. Dabei soll von Sachproblemen aus Kontexten wie Zu- und Ablauf sowie Geschwindigkeit und Weg ausgegangen und die Erfahrung mit Grenzprozessen erweitert werden.

Das Integral wird als aus Änderungsraten und Anfangsbestand (re-)konstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und erklärt. Das Integral kann als Bestand und unter bestimmten Bedingungen als Flächeninhalt interpretiert werden.

Der Bezug zur Differentialrechnung wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in der Form $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ mit $F' = f$ formuliert.

Bei der (Re-)Konstruktion von Beständen können Vorgänge betrachtet werden, die sich mithilfe konstanter oder stückweise linearer Funktionen beschreiben lassen. Auf in diesem Zusammenhang gemachten Entdeckungen aufbauend können Stammfunktionen definiert und die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung schließlich erkannt, formuliert und begründet werden.

Ein Beispiel eines aus Änderungsrate und Anfangsbestand (re-)konstruierten Bestandes kann folgende Aufgabe bieten:

Aufgabe 1:

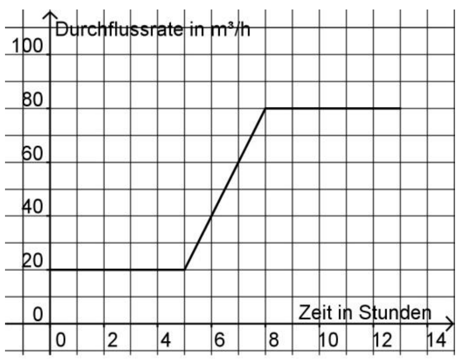
Die Messstelle einer Ölpipeline zeigt zu jedem Zeitpunkt die momentane Durchflussrate an. Sie wird mit Hilfe eines im Rohr befestigten Propellers bestimmt. Das Bild rechts zeigt ein dazugehöriges Messdiagramm.

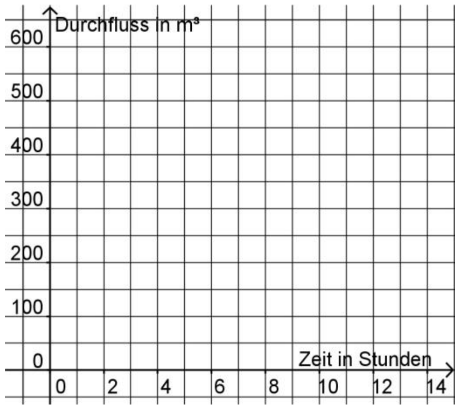
a) Ermitteln Sie die Gesamtölmenge, die in dem dargestellten Zeitraum durch die Pipeline fließt.

b) Berechnen Sie die gesamte Ölmenge, die nach jeder Stunde durch die Pipeline geflossen ist, und stellen Sie diese Werte im unteren Diagramm graphisch dar.

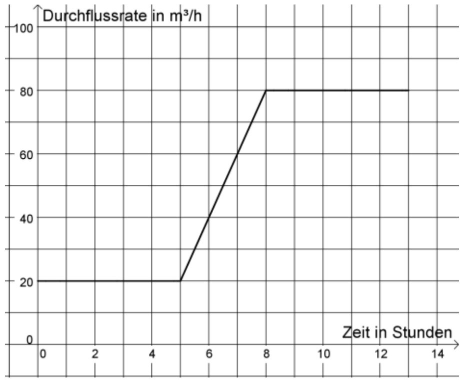
c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Funktion D, die den Durchfluss in den ersten 5 Stunden beschreibt.

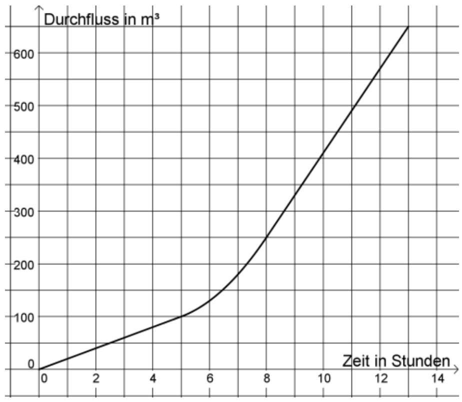
d) Entwickeln Sie die Funktionsterme für den Durchfluss in den Zeiträumen 5 bis 8 Stunden und 8 bis 13 Stunden. Berücksichtigen Sie dabei, dass sich der Durchfluss nicht sprunghaft ändern kann.





Eine Lösungsskizze wäre etwa:





a) Berechnung der Gesamtölmenge

$$5\text{h}\cdot 20\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 3\text{h}\cdot 20\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 3\text{h}\cdot\frac{60}{2}\frac{\text{m}^3}{\text{h}} + 5\text{h}\cdot 80\frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 650\text{m}^3$$

b) Berechnung der gesamten Ölmenge, die nach jeder Stunde durch die Pipeline geflossen ist:

Zeit in Stunden	Durchflussmenge in m^3
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	130
7	180
8	250
9	330
10	410
11	490
12	570
13	650

c) Eine Durchflussfunktion ist $D(t) = 20\cdot t$ für $0 \le t \le 5$.

d) Eine Durchflussfunktion ist $D_1(t) = 10\cdot t^2 - 80\cdot t + 250$ für $5 \le t \le 8$.

Eine Durchflussfunktion ist $D_2(t) = 80\cdot t - 390$ für $8 \le t \le 13$.

Der Graph der Funktionen ist im Bild oben dargestellt.

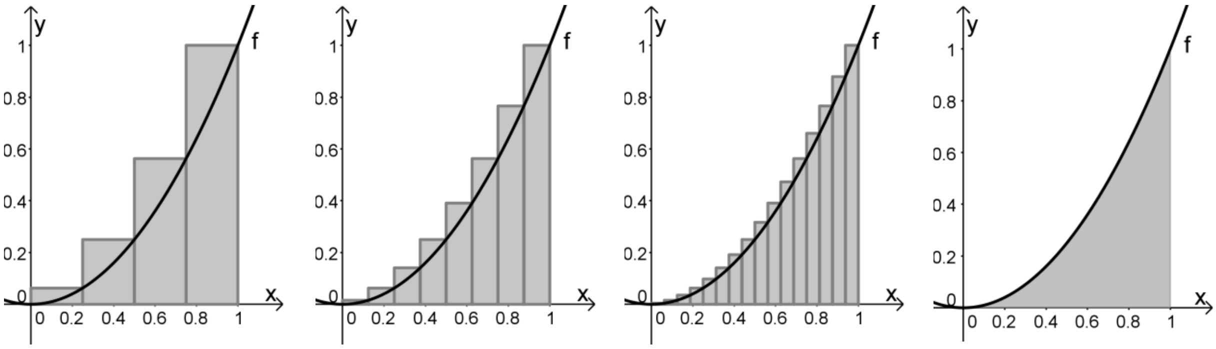
Die in diesem Zusammenhang auftretenden Fragen nach der Stetigkeit der Funktionen sollen anschauungsgeleitet begründet werden.

Um das Integral als Grenzwert von Produktsummen zu beschreiben, ist es sinnvoll, die (Re-)Konstruktion auch an Beispielen zu betrachten, bei denen die Berandung nicht stückweise linear ist. Für eine grundsätzliche Klärung der Vorgehensweise reicht eine Beschränkung auf in dem betrachteten Intervall monoton steigende Funktionen mit nicht negativen Funktionswerten aus.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$. Sie stellt eine Änderungsratenfunktion dar.
Betrachtet wird der Graph der Funktion im Intervall $[0\,;1]$.
Schätzen Sie den Flächeninhalt mithilfe sogenannter Obersummen durch Unterteilung in 4, 8, 16 Rechtecke ab.

i. 4 Rechtecke   ii. 8 Rechtecke   iii. 16 Rechtecke   iv. Fläche unter f

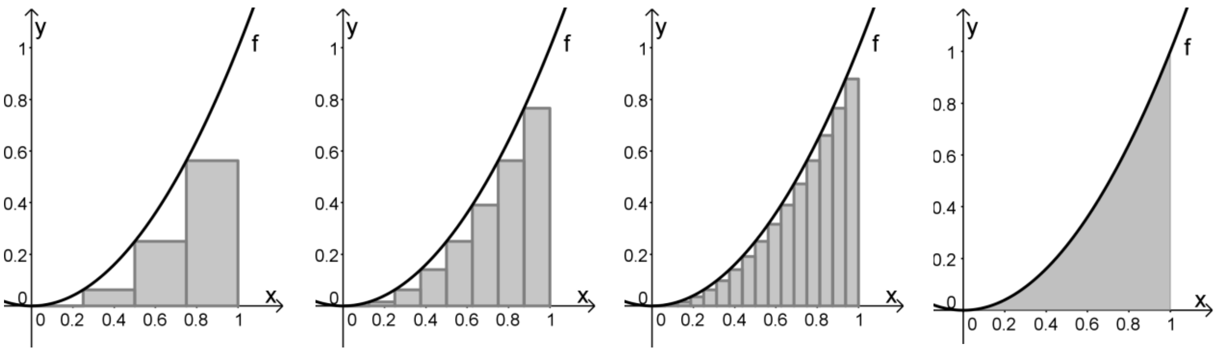


Für die Berechnung der Flächeninhalte ergibt sich:

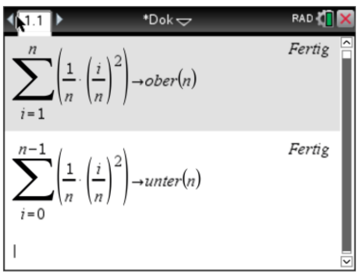
- 4 Rechtecke: $0{,}25 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}16 + 0{,}25 \cdot 0{,}36 + 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}46875$
- 8 Rechtecke: $\dfrac{51}{128} = 0{,}3984375$
- 16 Rechtecke: $\dfrac{187}{512} = 0{,}365234375$

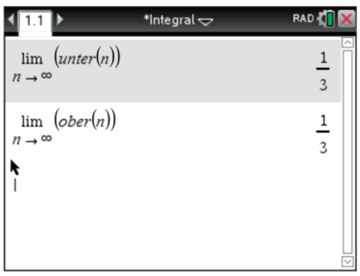
Analog können auch die Werte für die Untersummen ermittelt werden:

i. 4 Rechtecke   ii. 8 Rechtecke   iii. 16 Rechtecke   iv. Fläche unter f



Eine Veranschaulichung der Berechnung mithilfe entsprechender Werkzeuge unterstützt die Argumentation und dient der Illustration einer möglichen Vorgehensweise im gA:





Anschaulich ist klar, dass diese Obersummen bei immer weiterer Verfeinerung der Unterteilung gegen den gesuchten Flächeninhalt unter dem Graphen von f konvergieren.

Die bisherigen Erfahrungen können verallgemeinert werden:

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Bestimmen den Flächeninhalt unter dem Graphen von f im Intervall $[0\,;b]$ für ein beliebiges $b > 0$.
Begründen Sie die aufgeführten Terme.

Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ im Intervall $[0\,;b]$ bedeutet dies:

$$S_n = \frac{b}{n}\cdot\left(\left(\frac{1\cdot b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3\cdot b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n\cdot b}{n}\right)^2\right)$$

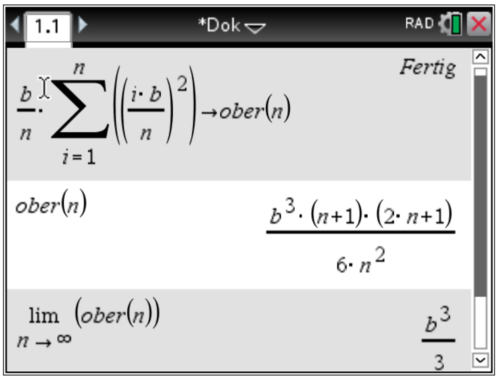
$$S_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$

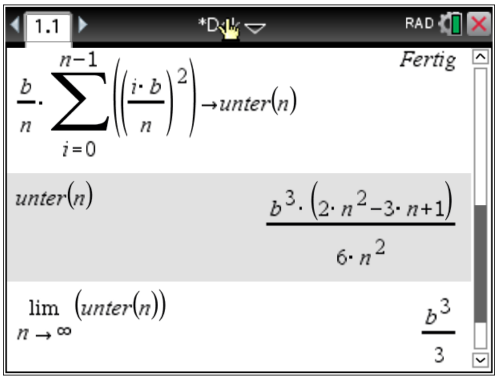
TIPP: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

$$S_n = b^3\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot n} + \frac{1}{6\cdot n^2}\right)$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}\cdot b^3$





Die Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen kann entweder einem Tafelwerk oder einem CAS-Rechner entnommen oder mitgeteilt werden.

Mit $S_n = \Delta x\cdot\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$ für $n \to \infty$
wird die Integralschreibweise erläutert:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^b x^2\,dx.$$

Die Frage, wann und wie weit die Grenzprozesse formalisiert werden, kann nicht pauschal beantwortet werden. Zur formalen Beschreibung kann die Limes-Schreibweise oder die Pfeil-Schreibweise verwendet werden. Dabei nimmt die Limes-Schreibweise eher den Grenzwert als Ergebnis eines Grenzprozesses in den Fokus und die Pfeil-Schreibweise legt den Fokus auf den Grenzprozess selbst. Die Schreibweise sollte den Argumentationsweisen der Schülerinnen und Schüler angepasst werden und diese sinnvoll verdeutlichen.

Die formale Beschreibung wird nicht benötigt, um den Grenzwert zu verstehen. Das anschauliche Verständnis, das die Schülerinnen und Schüler in früheren Schuljahrgängen erwerben (z.B. wenn Terme zu Punktmustern aufgestellt werden), wird hier weiter gefestigt.

Die Untersuchungen führen schließlich zur Definition der Stammfunktion und zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

> Gegeben ist eine Funktion f. Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn gilt:
> $F'(x) = f(x)$.
> Das heißt: Die Ableitung der Stammfunktion ist die gegebene Funktion f.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (1. Teil):

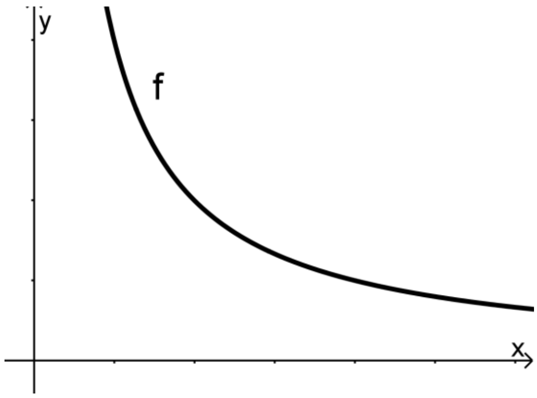
> Ist f eine auf $[a\,;b]$ stetige Funktion, so ist die durch $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ definierte Stammfunktion differenzierbar mit: $F_a{}'(x) = f(x)$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (2. Teil):

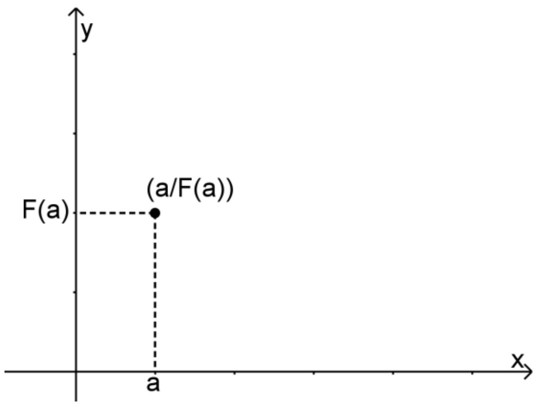
> Jede über $[a\,;b]$ integrierbare Funktion f, die dort eine Stammfunktion besitzt, erfüllt
> $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Für Kurse auf grundlegendem Anforderungsniveau gilt es, diesen zweiten Teil des Satzes nachzuweisen. Im Folgenden wird eine Beweismöglichkeit dargestellt.
Dabei wird der Fall betrachtet, dass der Graph von f oberhalb der x-Achse liegt.

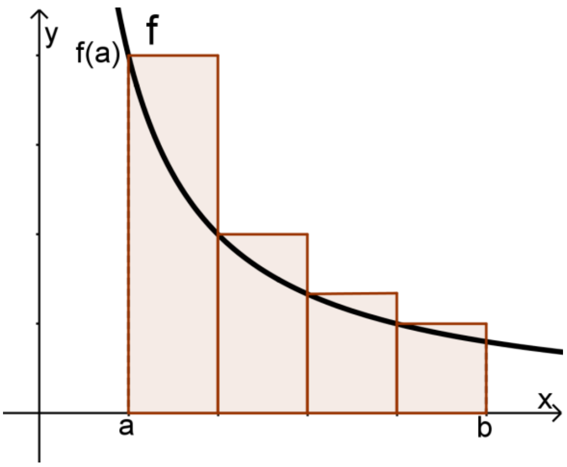
Es handelt sich um die (Re-)Konstruktion von Funktionen.
Das Ausgangsproblem besteht darin, dass f und $F(a)$ gegeben sind und $F(b)$ gesucht wird.
Wir versuchen eine schrittweise Annäherung an $F(b)$.
Gegeben ist die Funktion f mit ihrer Funktionsgleichung f(x) und dem zugehörigen Graphen.

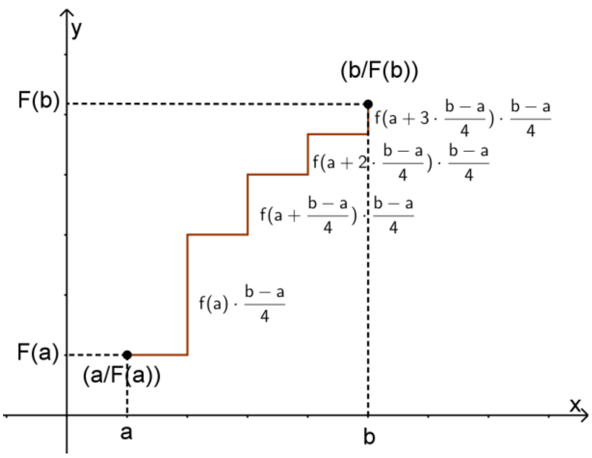


Im Sachzusammenhang beschreibt f eine Bestandsänderung.
Des Weiteren ist der Bestand F zum Zeitpunkt a, also F(a) gegeben.



Um den Bestand zum Zeitpunkt b näherungsweise zu bestimmen, werden die Bestände zwischen a und b sukzessive ergänzt.

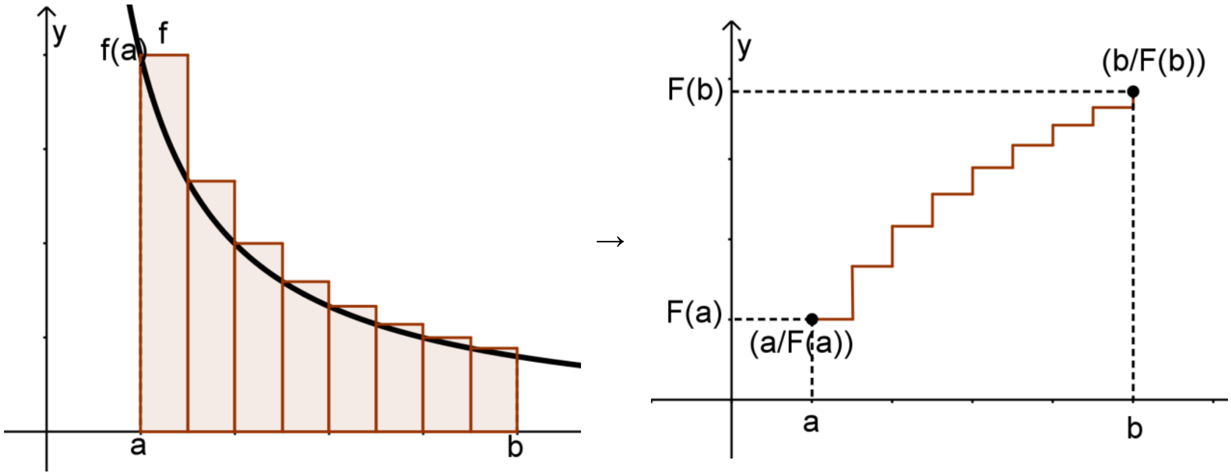




$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{4}\cdot f(a) + \frac{b-a}{4}\cdot f\left(a+\frac{b-a}{4}\right) + \frac{b-a}{4}\cdot f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{4}\right) + \frac{b-a}{4}\cdot f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{4}\right)$$

$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{4}\cdot\left(f(a) + f\left(a+\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+3\cdot\frac{b-a}{4}\right)\right)$$

Eine bessere Annäherung erhält man durch eine feinere Unterteilung bei der sukzessiven Annäherung (vgl. Ober- und Untersumme bei der Definition des Integrals).



$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{8}\cdot f(a) + \frac{b-a}{8}\cdot f\left(a+\frac{b-a}{8}\right) + \frac{b-a}{8}\cdot f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{8}\right) + \ldots + \frac{b-a}{8}\cdot f\left(a+7\cdot\frac{b-a}{8}\right)$$

$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{8}\cdot\left(f(a) + f\left(a+\frac{b-a}{8}\right) + f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{8}\right) + \ldots + f\left(a+7\cdot\frac{b-a}{8}\right)\right)$$

Oder allgemein bei einer Einteilung in n Teile:

$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{n}\cdot f(a) + \frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right) + \ldots + \frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

$$F(b) \approx F(a) + \frac{b-a}{n}\cdot\left(f(a) + f\left(a+\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right) + \ldots + f\left(a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

$$F(b) \approx F(a) + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

Für große Werte für n gilt $\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$ und damit

$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)dx$ und somit $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Bei diesen Überlegungen ist die Grundvorstellung des Integrals als Grenzwert von Produktsummen tragend.

Die (Re-)Konstruktion der Funktion F entspricht somit der Bildung von Flächeninhalten.