40 OM: Alternativer Zugang zur Raumanschauung und Koordinatisierung	gA/eA

Häufig haben Schülerinnen und Schüler Probleme, mit der Vektorrechnung verständig umzugehen. Zwar weiß jeder Lernende, was eine Gerade ist, aber warum muss man diese mit der vektoriellen Parameterform so kompliziert darstellen (zumal man in früheren Klassen gute Erfahrungen mit $y = m \cdot x + n$ gemacht hat)? Wie häufig werden Stütz- und Richtungsvektor miteinander verwechselt! Wenn dann später geometrische Konfigurationen berechnet werden sollen, kann der oftmals unverstandene Vektorkalkül die geometrische Einsicht behindern. Dazu kommen interne Inkonsistenzen des (schulischen) Vektorbegriffs: Ein Vektor ändert sich nicht, wenn man ihn parallel zu sich selbst verschiebt; dies gilt jedoch nicht für den „Ortsvektor". Die Definition eines Vektors als Repräsentant einer Pfeilklasse lässt sich somit nicht aufrecht erhalten. Und es gibt mehr begriffliches Durcheinander: In manchen Schulbüchern darf man einen Vektor an einen Punkt antragen (also die Operation „Vektor + Punkt" ausführen), in anderen Schulbüchern erscheint das als streng verboten (obwohl die Interpretation eines Vektors als Verschiebung dem widerspricht). Wenn man Vektoren als Zahlentupel definiert, erhebt sich erst recht die Frage, was denn nun ein Vektor „eigentlich" sei, zumal Punkte ja auch durch Zahlentupel definiert werden. Insbesondere ist kaum zu klären, warum man überhaupt zwischen Punkt und zugehörigem Ortsvektor unterscheiden muss und warum man nicht mit Punkten rechnen darf, sondern diese erst in Ortsvektoren „umwandeln" muss.

All diese Probleme können die Umsetzung der Leitidee „Raumanschauung und Koordinatisierung" stark behindern. Andererseits verschwinden all diese Probleme, wenn man nicht ausschließlich mit Vektoren, sondern auch mit Punkten rechnet. Darf man das überhaupt?

Zunächst die mathematische Rechtfertigung: Der zwei- oder dimensionale Vektorraum über den reellen Zahlen besteht aus Paaren oder aus Tripeln, die auch als Punkte interpretierbar sind. Man darf also (nach Auszeichnung des Ursprungs) mit Punkten wie mit Vektoren rechnen.

Der scheinbare Nachteil bei der Punktrechnung, nämlich den Ursprung auszeichnen zu müssen, besteht auch in der schulischen Vektorrechnung durch die dort erfolgte Auszeichnung der (vom Ursprung abhängigen) Ortsvektoren.

Der große Vorteil der Punktrechnung besteht darin, dass im Mittelpunkt des Unterrichts geometrische Objekte stehen und nicht ein (häufig unverstandener) Kalkül.

<u>Ein möglicher Unterrichtsgang:</u>

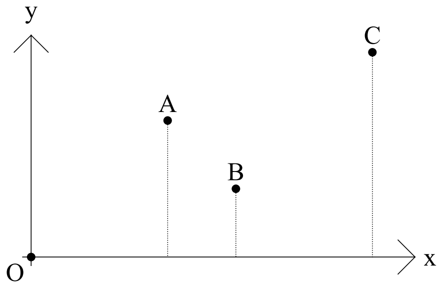
Im Folgenden finden alle Erläuterungen im Zweidimensionalen statt; sie lassen sich leicht auf den Raum übertragen.

<u>Schritt 1</u>: Was lässt sich über alle Punkte sagen, die auf einer Ursprungsgeraden g durch den Punkt $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen? Natürlich liegen etwa $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ auch auf dieser Geraden, und es ist naheliegend, sie mit $2 \cdot A$, $3 \cdot A$, $-A$ zu bezeichnen. Die Bezeichnung „$2 \cdot A$" bedeutet, dass alle Koordinaten von A mit 2 multipliziert werden müssen.

Damit ist klar, dass die Punkte auf g die Form $t \cdot A$ haben (mit reellem t). Im Gegensatz zu den Kenntnissen aus der Sekundarstufe I lässt sich nun auch die y-Achse so beschreiben, und auch bei einer Geraden im Raum hat deren allgemeiner Punkt die Form $t \cdot A$. Selbstverständlich ist P nicht eindeutig bestimmt.

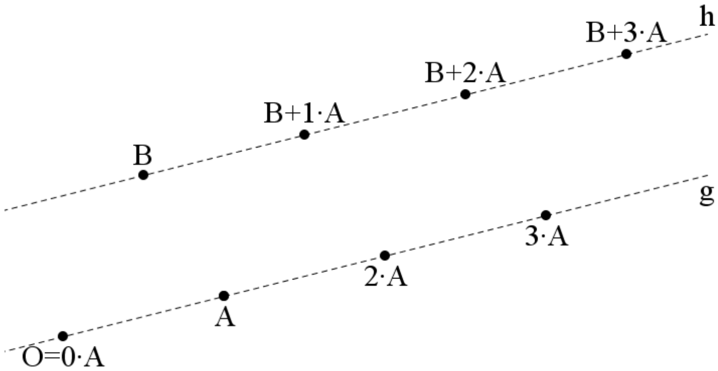
Schritt 2: Wenn man (skalare) Vielfache von Punkten bilden kann, kann man vielleicht Punkte auch addieren? Das ist tatsächlich naheliegend:

Nach Auszeichnung des Ursprungs $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ addieren sich zwei Punkte wie $A=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ koordinatenweise zu $C=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; das nebenstehende Bild zeigt die Addition der 1. Koordinaten.



Die Subtraktion von Punkten erklärt sich analog.

Schritt 3: Was lässt sich über alle Punkte sagen, die auf der Parallelen h zu g durch den Punkt $B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ gehen? Die Gerade h entsteht (wie beim Übergang von $y=m\cdot x$ zu $y=m\cdot x+b$) durch Verschiebung von g:



Somit hat ein allgemeiner Punkt von h die Form $B+t\cdot A$. Hierbei ist zu beachten, dass der Punkt A i.a. nicht auf der Geraden h liegt.

A ist aber auch die Differenz der Punkte $B+A$ und B, so dass es für *jede* Gerade naheliegend ist, ihren allgemeinen Punkt X zu beschreiben als $X=B+t\cdot R$, wobei B auf der Geraden liegt und R die Differenz zweier Punkte auf der Geraden ist. Eine solche Differenz nennt man *Richtungsvektor*. Damit ist ein *Vektor definiert als Differenz zweier Punkte* (und deswegen ändert er sich nicht, wenn er parallel zu sich selbst verschoben wird: $U-V=(U+W)-(V+W)$). Damit wird der Vektorbegriff auf eine bloße Schreibweise reduziert: Immer, wenn es um Differenzen von Punkten geht (wie beim Richtungsvektor oder beim Skalarprodukt), ist die Vektorschreibweise sinnvoll.

Nun ist auch klar, was die aus der Sekundarstufe I bekannte Form $y=m\cdot x+n$ mit der neuen Form $X=B+t\cdot R$ zu tun hat: Ein allgemeiner Punkt auf der zu $y=m\cdot x+n$ gehörigen Geraden hat die Form $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\m\cdot x+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$: Der Punkt $\begin{pmatrix}0\\n\end{pmatrix}$ liegt auf der Geraden (Punkt des „y-Achsenabschnitts“), und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ drückt die Steigung aus: „einen nach rechts, m nach oben“. Allerdings ist die neue Form allgemeiner, weil sich nun auch Geraden mit „Steigung unendlich“ beschreiben lassen (nämlich $x = a$ durch den allgemeinen Punkt $X = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$) und ebenfalls Geraden im Raum.

<u>Schritt 4</u>: Zu zwei (Richtungs-)Vektoren lässt sich nun auf die übliche Art und Weise ein Skalarprodukt definieren. Auch der allgemeine Punkt einer Ebene lässt sich analog mit Hilfe zweier Richtungsvektoren beschreiben.

Oft wird vermutet, dass eine Gerade im Raum durch $z = m \cdot x + n \cdot y + r$ beschrieben wird.

Aber der allgemeine Punkt ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ m \cdot x + n \cdot y + r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ n \end{pmatrix}$, beschreibt also eine Ebene.

Solche Identifizierungen sind deutlich schwieriger, wenn man nicht mit Punkten rechnen darf!

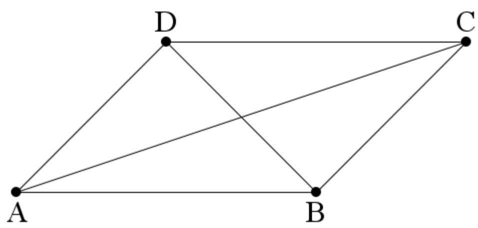
<u>Die Punktrechnung ist heuristisch vorteilhaft:</u>

<u>Mittelpunkte</u>: Der Mittelpunkt von $A = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ ist, so wie man es von Zahlen auch kennt, einfach gegeben durch $\frac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} (u+r)/2 \\ (v+s)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u+r \\ v+s \end{pmatrix}$. Das ist eine viel einfachere Beziehung als die entsprechende mit (Orts-)Vektoren.

<u>Schnitt zweier Geraden</u>: Wenn sich zwei Geraden mit den allgemeinen Punkten $A + t \cdot R$ und $B + s \cdot T$ schneiden, so lässt sich der Schnittpunkt auf zwei Arten beschreiben, nämlich als $A + t_0 \cdot R$ für eine gewisses t_0 und als $B + s_0 \cdot T$ für ein gewisses s_0, woraus der gewöhnliche Schnittalgorithmus folgt. Wichtig ist: Man fragt nach einem Punkt, und man bekommt als Ergebnis auch einen Punkt.

<u>Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen</u>: Mit Punkten ist der Beweis besonders einfach: Es ist $C = D + \underbrace{B - A}_{\text{Richtungsvektor}}$, also

$\frac{A+C}{2} = \frac{A+D+B-A}{2} = \frac{D+B}{2}$.



<u>Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden</u>: Es sei ABC ein Dreieck; die Seitenhalbierende durch A hat den allgemeinen Punkt $X(t) = A + t \cdot \left(\frac{B+C}{2} - A \right) = A + t \cdot \frac{B + C - 2 \cdot A}{2}$;

insbesondere ist $X\left(\frac{2}{3}\right) = A + \frac{B + C - 2 \cdot A}{3} = \frac{A+B+C}{3}$; dieser Punkt liegt aus Symmetriegründen auch auf den beiden anderen Seitenhalbierenden.

Schulbücher und GeoGebra:

Als Schulbuch gibt es bisher wohl nur das österreichische Schulbuch Malle et al.: Mathematik verstehen 5.

GeoGebra unterstützt das Rechnen mit Punkten. So liefert (2, 2) + (3, 1) das Ergebnis (5, 3). Man gibt „A = (2, 2)“, „B = (3, 1)“ und „C = A + B“ ein. Punktkoordinaten werden nebeneinander geschrieben; im Druck und an der Tafel ist es übersichtlicher, sie untereinander zu schreiben.

Man kann die Punkte A und B mit den Befehlen

u = Vektor(A) und v = Vektor(B)

auch in Ortsvektoren „umwandeln“; u + v liefert dann den Ortsvektor zu A + B.

Auch die Addition von Punkten und Vektoren ist erlaubt (und, wenn man Vektoren als Differenz von Punkten auffasst, folgerichtig und sinnvoll); das Ergebnis ist ein Punkt.

Der Befehl „Skalarprodukt“ erwartet zwar Vektoren als Argumente, funktioniert jedoch auch, wenn man statt dessen Punkte (die ja wegen $P = P - O$ spezielle Vektoren sind) eingibt. Auch die Kurzschreibweise „A*B“ liefert das Skalarprodukt.