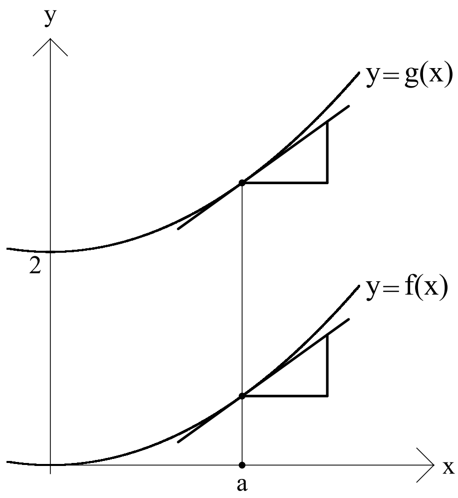
Anschauliche Begründung von Summen- und Faktorregel

Konstanter Summand:



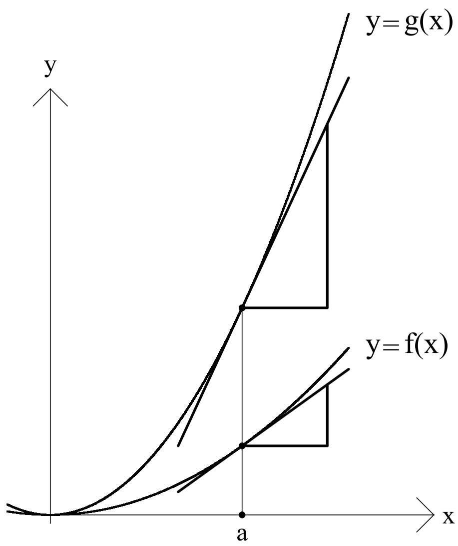
Den Graphen von g mit $g(x) = 2 + f(x)$ erhält man aus dem Graphen von f, indem man den Graphen von f in y-Richtung um 2 verschiebt.

Wenn man für einen festen x-Wert a gleich breite Steigungsdreiecke zu f und g miteinander vergleicht, so hat das Steigungsdreieck zu g die gleiche Höhe wie das Steigungsdreieck zu f. Daher sind die Tangentensteigungen von g alle genauso groß wie die entsprechenden Tangentensteigungen von f. Aus $g(x) = 2 + f(x)$ folgt $g'(a) = f'(a)$ für alle a.

Rechnerischer Nachweis:

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{\left(f(a+h)+2\right)-\left(f(a)+2\right)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{h\to 0}{\rightarrow} f'(a).$$

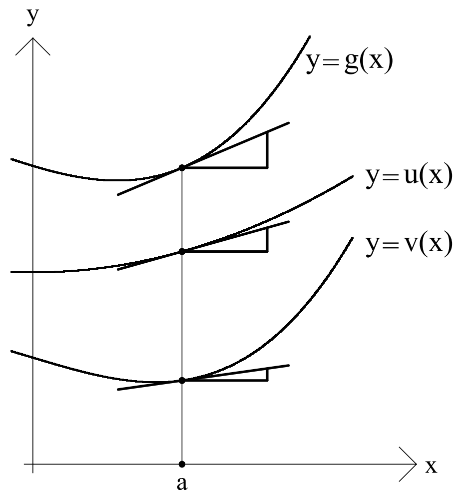
Konstanter Faktor:



Den Graphen von g mit $g(x) = 3 \cdot f(x)$ erhält man aus dem Graphen von f, indem man den Graphen von f in y-Richtung mit dem Faktor 3 streckt.
Wenn man für einen festen x-Wert a gleich breite Steigungsdreiecke zu f und g miteinander vergleicht, so ist das Steigungsdreieck zu g dreimal so hoch wie das Steigungsdreieck zu f.
Daher sind die Tangentensteigungen von g alle dreimal so groß wie die entsprechenden Tangentensteigungen von f.
Aus $g(x) = 3 \cdot f(x)$ folgt $g'(a) = 3 \cdot f'(a)$ für alle a.

Rechnerischer Nachweis:

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{3\cdot f(a+h)-3\cdot f(a)}{h} = 3\cdot\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{h\to 0}{\rightarrow} 3\cdot f'(a).$$



Summe zweier Funktionen:
Den Graphen von g mit $g(x) = u(x) + v(x)$ erhält man durch „Addition" der Graphen von u und v.
Wenn man für einen festen x-Wert a gleich breite Steigungsdreiecke zu u, v und g miteinander vergleicht, so ist die Höhe des Steigungsdreiecks zu g die Summe der entsprechenden Höhen zu u und v.
Daher sind die Tangentensteigungen von g alle so groß wie die Summen der entsprechenden Tangentensteigungen von u und v.

Aus $g(x) = u(x) + v(x)$ folgt
$g'(a) = u'(a) + v'(a)$ für alle a.

Rechnerischer Nachweis:

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{[u(a+h)+v(a+h)]-[u(a)+v(a)]}{h}$$
$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} \xrightarrow{h\to 0} u'(a)+v'(a)$$